EE4 AL 2024-1 VI - ...

Algebra Lineal (Universidad de Lima)

UNIVERSIDAD DE LIMA

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: Álgebra Lineal
CICLO: 2024-1
TIEMPO: 90 minutos

SOLUCIÓN EXAMEN ESCRITO N° 4

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- ✓ Forman parte de los criterios de calificación: El procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática.
- ✓ Se permite el uso personal de una calculadora científica básica, no programable ni graficadora.
- ✓ Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- ✓ La prueba consta de 4 preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:

- ✓ Utilizar material de consulta (apuntes de clase, fotocopias o materiales similares).
- ✓ Mantener encendidos y al alcance de la mano el teléfono celular, smartwatch, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- ✓ Conversar o hacer consultas durante el desarrollo de la prueba.
- ✓ Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas o de preguntas.

____
FIRMA DEL ALUMNO
(LEYÓ LAS INSTRUCCIONES)

Fecha: 12/07/2024

---

1. (6P) Esta pregunta consta de tres partes independientes

a) (2P) Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix} m-4n & -2-q & 3-m \\ p+4q & 0 & 16 \\ m+n-18 & -16 & q+p-8 \end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix} x-4 & y+7 & y-2 \\ x-3 & x-1 & y+10 \\ 2x-6 & 2y-14 & y-5 \end{bmatrix}$$

Donde A es una matriz antisimétrica y B es una matriz triangular superior.
Halle los elementos de las matrices A y B.

Solución

$\underbrace{\begin{matrix} m-4n=0 \\ m+n-18=m-3 \\ p+4q=q+2 \\ p+q=8 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} m=60 \\ n=15 \\ p=11 \\ q=-3 \end{matrix}}_{\mathbf{0{,}5\ P}}$ $\rightarrow \underbrace{A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -57 \\ -1 & 0 & 16 \\ 57 & -16 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0{,}5\ P}}$ $\underbrace{x-3=0 \wedge 2y-14=0}_{\mathbf{0{,}5P}} \rightarrow \underbrace{B=\begin{bmatrix} -1 & 14 & 5 \\ 0 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0{,}5\ P}}$	1P cada matriz

b) (2P) Sea $C=\left[c_{ij}\right]_{3\times 3}$ una matriz simétrica tal que $c_{ij}=|2i-j|+4,\ j\geq i$. Si $M^t=I^2+3C^t$, donde I es la matriz identidad de orden 3×3 entonces halle la matriz M.

Solución

$\underbrace{C=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{1\ P}} \rightarrow \underbrace{M^t=\begin{bmatrix} 16 & 12 & 15 \\ 12 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow M=\begin{bmatrix} 16 & 12 & 15 \\ 12 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 22 \end{bmatrix}}_{\mathbf{1\ P}}$	2P

c) (2P) Si la matriz D es simétrica y E una matriz del mismo orden que D. En la siguiente ecuación matricial, despeje la matriz X.

$$(X+DE^t)^t+D-(D^tE)^t=(E^tD)^t+D^t(I_3-E^t)^t+ED$$

Solución

$(X+DE^t)^t+D-(D^tE)^t=(E^tD)^t+D^t(I_3-E^t)^t+ED$	0,5P
$X^t+ED^t+D-E^tD=D^tE+D^t-D^tE+ED$	0,5P
$\Leftrightarrow X^t-E^tD=0$	0,5P
$\Leftrightarrow X^t=E^tD \Leftrightarrow X=DE$	0,5P

2. (5P) La cadena hotelera “HOTELSA” administra dos hoteles en Lima: Hotel A y Hotel B. Para el mantenimiento de cada hotel se requiere tres tipos de materiales: pintura, mobiliario y electrodomésticos. Por año, las cantidades requeridas de cada material en cada hotel se muestran en la siguiente tabla:

Hotel	Pintura (galones)	Mobiliario (unidades)	Electrodomésticos (unidades)
A	6	4	8
B	8	6	6

Los costos por galón de pintura, unidad de mobiliario y unidad de electrodomésticos en el primer año de funcionamiento son los siguientes:

Material	Costo en soles por galón/unidad
Pintura	50
Mobiliario	200
Electrodoméstico	300

a) (1P) Construya una matriz R de orden 2×3 para organizar la información de los hoteles y los materiales utilizados por año.

Solución

$$R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) (1,5P) Construya una matriz Q de orden 3×3 para organizar la información de los costos por cada material, donde las filas son para los materiales y las columnas para los costos por año, si se sabe que en el segundo año los costos en los materiales son los mismos que en el primer año, pero en el tercer año debido a la inflación en el país, el precio de pintura, mobiliarios y electrodomésticos subieron al doble.

Solución

$$Q = \begin{array}{c} \\ P \\ M \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{A1} & \boldsymbol{A2} & \boldsymbol{A3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 50 & 50 & 100 \\ 200 & 200 & 400 \\ 300 & 300 & 600 \end{bmatrix} \end{array}$$

c) (2P) Mediante operaciones matriciales, halle una matriz C que represente los gastos totales de la empresa HOTELSA al considerar los precios de los tres materiales en un periodo de 3 años.

Solución

$$C = RQ = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 50 & 100 \\ 200 & 200 & 400 \\ 300 & 300 & 600 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \\ A \\ B \end{matrix} \begin{matrix} \boldsymbol{A1} & \boldsymbol{A2} & \boldsymbol{A3} \\ \begin{bmatrix} 3500 & 3500 & 7000 \\ 3400 & 3400 & 6800 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

d) (0,5P) De acuerdo con el resultado anterior, determine qué hotel tuvo el mayor gasto total durante los tres años.

Solución

Gastos totales del hotel $A = 3500 + 3500 + 7000 = 14000$
Gastos totales del hotel $B = 3400 + 3400 + 6800 = 13600$
Por lo tanto, el hotel A es el que obtuvo el mayor gasto total con 14000 soles.

3. (6P) Dadas las matrices A y B, tales que $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) (2P) Si las matrices A y B son regulares, despeje la matriz X a partir de la ecuación matricial:

$$4A^2B^2 + (BX^{-1}A)^{-1} = 2(B^2A)^{-1} + \left(\frac{1}{4}A^{-2}\right)^{-1} B^2$$

b) (4P) Halle la inversa de la matriz A usando el método de Gauss-Jordan.

Solución:

a) $4A^2B^2 + (X^{-1}A)^{-1}B^{-1} = 2(B^2A)^{-1} + \left(\frac{1}{4}A^{-2}\right)^{-1} B^2$ $\rightarrow 4AB^2 + A^{-1}XB^{-1} = 2A^{-1}B^{-2} + 4A^2B^2$	0,5P por la inversa de $(X^{-1}A)$ y 0,5P por la inversa de $\frac{1}{4}A^{-2}$
$\rightarrow A^{-1}XB^{-1} = 2A^{-1}B^{-2}$	0,5P por simplificar
$X = 2B^{-1}$	0,5P por despejar X

b) $$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{f_2 - 2f_3}$$ $$\cong \left[\begin{array}{ccc:ccc} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{f_1 - f_3}$$ $$\cong \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{\begin{matrix} f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1 \end{matrix}}$$ $$\cong \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right] \overrightarrow{f_3 - 3f_2}$$ $$\cong \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right]$$ Luego, $$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$	0,5P por cada operación elemental por filas (Max. 3,5P) 0,5P por la matriz inversa de A .

Pregunta 4 (3P)

4.(3P) Halle el (o los) valor(es) de x, si la matriz A no tiene inversa

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x}+\mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \boldsymbol{x}+\mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{11} & \mathbf{16} & \boldsymbol{x}+\mathbf{11} \end{bmatrix}$$

Solución

Como la matriz A no tiene inversa, se cumple: $$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x}+\mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \boldsymbol{x}+\mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{11} & \mathbf{16} & \boldsymbol{x}+\mathbf{11} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$	**0,5**
Pero:	**1,5**

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & x+1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & x+1 & 6 \\ 5 & 2x+11 & 16 & x+11 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2+(-1)f_1} \xrightarrow{f_3+(-2)f_1} \xrightarrow{f_4+(-5)f_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & x-2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & x-3 & 4 \\ 0 & 2x-4 & 6 & x+6 \end{vmatrix}$	
$\lvert A\rvert \xrightarrow{f_4+(-2)f_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & x-2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & x-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x+2)$	0,5
Por lo tanto: $\lvert A\rvert = 0 \rightarrow \quad x=-2 \quad , \quad x=2 \quad , \quad x=3$	0,5

Los profesores de la asignatura